Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme
Übung

1. Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichungssysteme.

a) $\begin{array}{lrrcr} \text{I)} & 2x & +3y & = & 5 \\ \text{II)} & 3x & +4y & = & 7 \end{array}$

b) $\begin{array}{lrrcr} \text{I)} & \frac{1}{3}x & +y & = & 2 \\ \text{II)} & -x & -3y & = & 3 \end{array}$

c) $\begin{array}{lrrcr} \text{I)} & \frac{1}{2}x & -2y & = & 1 \\ \text{II)} & -2x & +8y & = & -4 \end{array}$

d) $\begin{array}{lrrcr} \text{I)} & 2x & -3y & = & 5 \\ \text{II)} & 3x & -\frac{9}{2}y & = & 1 \end{array}$

e) $\begin{array}{lrrcr} \text{I)} & \frac{1}{4}x & -\frac{1}{5}y & = & 1 \\ \text{II)} & 5x & -4y & = & 20 \end{array}$

2. Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender linearer Gleichungssysteme.

a) $\begin{array}{lrrrcr} \text{I)} & 3x_1 & +x_2 & & = & 0 \\ \text{II)} & 2x_1 & +4x_2 & +3x_3 & = & 2 \\ \text{III)} & 3x_1 & -x_2 & -x_3 & = & 2 \end{array}$

b) $\begin{array}{lrrrcr} \text{I)} & 4x_1 & -4x_2 & +x_3 & = & 7 \\ \text{II)} & x_1 & +3x_2 & +2x_3 & = & -3 \\ \text{III)} & 2x_1 & -10x_2 & -3x_3 & = & 11 \end{array}$

c) $\begin{array}{lrrrcr} \text{I)} & -2x_1 & +3x_2 & -x_3 & = & 0 \\ \text{II)} & x_1 & & +x_3 & = & 3 \\ \text{III)} & 4x_1 & -3x_2 & +3x_3 & = & 6 \end{array}$

3. Ein lineares Gleichungssystem besitzt die beiden Lösungen $(0; 1)$ und $(2; 5)$. Geben Sie zwei weitere Lösungen an.

4. Erstellen Sie jeweils ein lineares Gleichungssystem mit drei Unbekannten und drei Gleichungen, das…

   a) …genau die Lösungsmenge $L = \{(5; -3; 1)\}$ besitzt.

   b) …unlösbar ist.

   c) …unendlich viele Lösungen besitzt. Geben Sie für diesen Fall die Lösungsmenge Ihres Systems an.

5. Bei der Umrechnung des RGB-Farbmodells im Computer auf das CMY-Modell für einen Drucker werden vorliegende Farbinformationen entsprechend folgendem Gleichungssystem umgewandelt. Die Grundfarben sind mit R (Rot), B (Blau) und G (Grün) bzw. C (Cyan), M (Magenta) und Y (Gelb) bezeichnet.

$$\begin{array}{rcccccc} \text{I)} & 0{,}2\text{R} & +0{,}3\text{G} & +0{,}2\text{B} & = & \text{C} \\ \text{II)} & 0{,}5\text{R} & -0{,}1\text{G} & & = & \text{M} \\ \text{III)} & 0{,}1\text{R} & +0{,}4\text{G} & +0{,}3\text{B} & = & \text{Y} \end{array}$$

a) Berechnen Sie den Farbwert M für $\begin{pmatrix} \text{R} \\ \text{G} \\ \text{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \\ 1 \end{pmatrix}$ sowie umgekehrt den Wert von R für $\begin{pmatrix} \text{C} \\ \text{M} \\ \text{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix}$.

b) Durch einen Softwarefehler wird anstelle der dritten Zeile der Koeffizientenmatrix nochmals die zweite Zeile verwendet. Sie lautet dann

$$\text{III) } 0{,}5\text{R} - 0{,}1\text{G} = \text{Y}.$$

Erläutern Sie die Folgen des Fehlers in Bezug auf die Lösbarkeit des Gleichungssystems.

6. Lösen Sie folgende linearen Gleichungssysteme in Abhängigkeit vom jeweiligen Parameter $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rccccc} \text{I)} & x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & 2 \\ \text{II)} & & ax_2 & +2x_3 & = & 2 \\ \text{III)} & 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccccc} \text{I)} & 2x_1 & +x_2 & -3x_3 & = & 4 \\ \text{II)} & 4x_1 & +3x_2 & -5x_3 & = & 6 \\ \text{III)} & -2x_1 & -x_2 & +ax_3 & = & -4 \end{array}$$

Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme
Lösung

1.
   a) $L = \{(1;1)\}$
   b) $L = \emptyset$
   c) $L = \left\{(x;y) \,\middle|\, y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}x \land x \in \mathbb{R}\right\}$
   d) $L = \emptyset$
   e) $L = \left\{(x;y) \,\middle|\, y = \frac{5}{4}x - 5 \land x \in \mathbb{R}\right\}$

2.
   a) $L = \{(1;-3;4)\}$
   b) $L = \emptyset$
   c) $L = \left\{(x_1;x_2;x_3) \,\middle|\, x_1 = 3 - x_3 \land x_2 = 2 - \frac{1}{3}x_3 \land x_3 \in \mathbb{R}\right\}$

3. Da das System bereits zwei Lösungen besitzt, muss es bereits unendlich viele Lösungen haben. Die Punkte dazu liegen auf der Geraden mit der Gleichung $y = 2x + 1$, also sind z.B. $(1;3)$ und $(3;7)$ weitere Lösungen.

4.

Einfachste Möglichkeit wäre z.B.
$$\begin{array}{lccccc} \text{I)} & x_1 & \square & \square & = & 5 \\ \text{II)} & \square & x_2 & \square & = & -3 \\ \text{III)} & \square & \square & x_3 & = & 1 \end{array}$$

   a) Wichtig ist hier ein Widerspruch, z.B. in der dritten Zeile:
$$\begin{array}{lccccc} \text{I)} & x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 1 \\ \text{II)} & \square & x_2 & +x_3 & = & 0 \\ \text{III)} & \square & \square & 0 & = & 1 \end{array}$$

   b) Beachten Sie die Nullzeile in
$$\begin{array}{lccccc} \text{I)} & x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 1 \\ \text{II)} & \square & x_2 & +x_3 & = & 0; \\ \text{III)} & \square & \square & 0 & = & 0 \end{array}$$

   hier ist $L = \{(1;x_2;x_3) | x_2 = -x_3 \land x_3 \in \mathbb{R}\}$.

5.

a) $M = 0{,}5 \cdot 50 - 0{,}1 \cdot 50 = 20$

Für $\begin{pmatrix} C \\ M \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix}$ ergibt sich $R = 10$.

b) Subtraktion III)– II) liefert die Gleichung $Y - M = 0$.
Für den Wert $M = Y$ existieren daher unendlich viele Lösungen,
für $M \neq Y$ keine Lösung.

6.

a) 1. Fall: $a = -2$
Widerspruch, demnach
$L = \emptyset$

2. Fall: $a \neq -2$
Eindeutige, von a abhängige Lösung
$L = \left\{\left(\frac{a-2}{a+2}; \frac{4}{a+2}; \frac{-a+2}{a+2}\right)\right\}$

b) 1. Fall: $a = 3$
Unendlich viele Lösungen
$L = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 = 3 + 2x_3 \wedge x_2 = -2 - x_3 \wedge x_3 \in \mathbb{R}\}$

2. Fall: $a \neq 3$
Eine Lösung
$L = \{3; -2; 0\}$